# VECTORES ALEATORIOS GAUSSIANOS

**Miguel Ángel García Álvarez**

Asumimos que tenemos definido un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \Im, P)$ y todos los vectores aleatorios con los que tratemos estarán formados por variables aleatorias reales.

## 1. Formas cuadráticas y matrices simétricas

**Definición 1** (**Formas cuadráticas n-dimensionales**). *Se dice que una función $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es una forma cuadrática si tiene la forma:*

$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{j,k \in \{1,\dots,n\}: j \leq k\}} c_{jk} x_j x_k$

*donde los coeficientes $c_{jk}$ son constantes.*

**Definición 2** (**Formas cuadráticas n-dimensionales definidas positivas**). *Se dice que una forma cuadrática $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es definida positiva si $F(x) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.*

**Definición 3** (**Formas cuadráticas n-dimensionales definidas estrictamente positivas**). *Se dice que una forma cuadrática $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es definida estrictamente positiva si $F(x) > 0$ para cualquier vector $x \neq 0$.*

Si $Q$ es una matriz simétrica de $n \times n$, arbitraria, entonces la función $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^t Q x$ es una forma cuadrática, a la cual denominaremos la forma cuadrática asociada a la matriz $Q$.

**Definición 4** (**Matrices definidas positivas**). *Se dice que una matriz simétrica de $n \times n$ es definida positiva si su forma cuadrática asociada es definida positiva.*

**Definición 5** (**Matrices definidas estrictamente positivas**). *Se dice que una matriz simétrica de $n \times n$ es definida estrictamente positiva si su forma cuadrática asociada es definida estrictamente positiva.*

Denotaremos por $I_n$ a la matriz diagonal de $n \times n$ para la cual $a_{ii} = 1$, para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$ y por $D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ a la matriz diagonal de $n \times n$ cuyos elementos sobre la diagonal son $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

**Definición 6** (**Matrices ortogonales**). *Diremos que una matriz $A$, de $n \times n$, es ortogonal si $A^t A = I_n$.*

Supongamos que $A$ es ortogonal y sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = 0$, entonces $x = I_n x = A^t A x = 0$; así que $A$ es invertible. Además:

$A^{-1} = I_n A^{-1} = (A^t A) A^{-1} = A^t (A A^{-1}) = A^t I_n = A^t$

De aquí se sigue a su vez que $A^t$ es ortogonal.

**Proposición 1.** *Sea $A$ una matriz de $n \times n$, entonces la matriz $Q = AA^t$ es simétrica y definida positiva. Si además $A$ es invertible entonces $Q$ es definida estrictamente positiva.*

**Demostración**

$Q^t = (AA^t)^t = AA^t = Q$, así que $Q$ es simétrica.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$x^t Q x = x^t A A^t x = (A^t x)^t (A^t x^t) = (A^t x) \cdot (A^t x) = \|A^t x\|^2 \geq 0$

Así que $Q$ es definida positiva.

Si $A$ es invertible, $A^t x = 0$ si y sólo si $x = 0$. Así que, si $x^t Q x = 0$, entonces $\|A^t x\| = 0$, así que $x = 0$, lo cual demuestra que $Q$ es estrictamente definida positiva.

■

**Corolario 1.** *Sea $A$ una matriz de $n \times n$, entonces la matriz $Q = A^t A$ es simétrica y definida positiva. Si además $A$ es invertible entonces $Q$ es estrictamente definida positiva.*

Se tiene además el siguiente resultado:

**Proposición 2.** *Sea $Q$ una matriz simétrica de $n \times n$, entonces sus valores propios, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, son reales y existe una base ortonormal, $v^{(1)}, v^{(2)} \ldots, v^{(n)}$, de $\mathbb{R}^n$ tal que $Q(v^{(j)}) = \alpha_j v^{(j)}$ para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

**Corolario 2.** *Si $Q$ es una matriz simétrica de $n \times n$, existen $n$ números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una matriz ortogonal $P$ tales que $P^t Q P = D_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$.*

**Demostración**

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los valores propios de $Q$ y $v^{(1)}, v^{(2)} \ldots, v^{(n)}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ tal que $Q(v^{(j)}) = \alpha_j v^{(j)}$ para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Definamos una matriz $P$ cuyas columnas estén formadas por los vectores $v^{(1)}, v^{(2)} \ldots, v^{(n)}$. Obviamente $P$ es ortogonal.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $v^{(j)} = \left(v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \ldots, v_n^{(j)}\right)$. Se tiene entonces:

$$P^t Q P = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \cdots & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \cdots & v_1^{(n)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \cdots & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 v_1^{(1)} & \alpha_2 v_1^{(2)} & \cdots & \alpha_n v_1^{(n)} \\ \alpha_1 v_2^{(1)} & \alpha_2 v_2^{(2)} & \cdots & \alpha_n v_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 v_n^{(1)} & \alpha_2 v_n^{(2)} & \cdots & \alpha_n v_n^{(n)} \end{pmatrix} = D_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$$

■

**Corolario 3.** *Si $Q$ es una matriz simétrica y definida positiva, de $n \times n$, existen $n$ números reales no negativos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una matriz ortogonal $P$ tales que $P^tQP = D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. Si $Q$ es definida estrictamente positiva, entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números reales positivos.*

**Demostración**

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $n$ números reales y $P$ una matriz ortogonal tales que $P^tQP = D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea $w^{(j)}$ el vector de $\mathbb{R}^n$ cuya $j$-ésima coordenada es 1 y todas las demás son cero. Entonces, como $P$ es invertible, $Pw^{(j)} \neq 0$ y como $Q$ es definida positiva, $(Pw^{(j)})^tQ(Pw^{(j)}) \geq 0$. Por lo tanto:

$$\alpha_j = \alpha_j \left(w^{(j)} \cdot w^{(j)}\right) = \left(w^{(j)}\right)^t \alpha_j w^{(j)} = \left(w^{(j)}\right)^t D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} w^{(j)}$$

$$= \left(w^{(j)}\right)^t P^tQPw^{(j)} = (Pw^{(j)})^tQ(Pw^{(j)}) \geq 0$$

Si $Q$ es definida estrictamente positiva, el $\geq$ puede reemplazarse por $>$.

$\blacksquare$

**Corolario 4.** *Si $Q$ es una matriz simétrica y definida estrictamente positiva, entonces es invertible.*

**Demostración**

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reales positivos y $P$ una matriz ortogonal tales que $P^tQP = D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. Entonces $D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ es invertible y $Q = PD_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}P^t$; así que $Q$ es invertible.

$\blacksquare$

**Proposición 3.** *Sea $Q$ una matriz simétrica y definida positiva, entonces existe una matriz $B$, simétrica y definida positiva tal que $Q = B^2$. Si $Q$ es definida estrictamente positiva, entonces existe una matriz $B$, definida estrictamente positiva, con la misma propiedad.*

**Demostración**

Si $Q$ es de $n \times n$, existen $n$ números reales no negativos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una matriz ortogonal $P$ tal que $P^tQP = D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$.

Definamos $B = PD_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}P^t$. Entonces:

$$B^t = \left(PD_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}P^t\right)^t = PD_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}P^t = B$$

Así que $B$ es simétrica.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ distinto del vector cero, entonces, como $P^t$ es invertible, se tiene $P^tx \neq 0$. Además, la matriz $D_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}$ es definida positiva. Por lo tanto:

$$x^tBx = x^tPD_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}P^tx = (P^tx)\, D_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}\, (P^tx) \geq 0$$

Así que $B$ es definida positiva.

Si $Q$ es definida estrictamente positiva, entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son positivos, así que $D_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}$ es definida estrictamente positiva y, entonces, $B$ también lo es.

Finalmente:

$$B^2 = PDP^tPDP^t = PD^2P^t = PD_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}P^t = Q$$

∎

**Corolario 5.** *Sea $Q$ una matriz simétrica y definida positiva, entonces existe una matriz $A$ tal que $Q = AA^t$. Si $Q$ es definida estrictamente positiva, entonces existe una matriz $A$, invertible, con la misma propiedad.*

**Demostración**

Sea $B = PD_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}P^t$ como en la demostración de la proposición anterior, entonces $Q = B^2 = B^tB$ ya que $B$ es simétrica.

Además, si $Q$ es definida estrictamente positiva, entonces $D_{\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}}$ es invertible, así que $B$ también lo es.

∎

**Proposición 4.** *La matriz de covarianzas $C = (c_{jk})$, de cualquier vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, es simétrica y definida positiva.*

**Demostración**

Obviamente $C$ es simétrica.

Si $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ es el vector de esperanzas de $X$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^n x_k (X_k - \mu_k)\right)^2\right] = \sum_{j=1}^n \left[x_j \left(X_j - \mu_j\right) \sum_{k=1}^n x_k (X_k - \mu_k)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k E\left[\left(X_j - \mu_j\right)(X_k - \mu_k)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{jk} x_k\right) x_j = (Cx) \cdot x = x^tCx$$

Así que $x^tCx \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

∎

## 2. Vectores aleatorios gaussianos

**Definición 7.** *Diremos que un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es gaussiano si existe un vector aleatorio $U = (U_1, \ldots, U_n)$, cuyas componentes son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, una matriz $A$ de $n \times n$ y un vector $\mu$ $n$-dimensional tales que $X = AU + \mu$. Si $n = 1$, diremos que $X$ es una variable aleatoria gaussiana.*

**Proposición 5.** *Supongamos que el vector aleatorio* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *es gaussiano y sean* $A = (a_{ik})$, $U$ *y* $\mu$ *tales que* $X = AU + \mu$, *de acuerdo con la definición 7, entonces* $\mu$ *y* $C = (c_{jk}) = AA^t$ *son el vector de esperanzas y la matriz de covarianzas, respectivamente, de* $X$.

**Demostración**

Sean $A = (a_{jk})$, entonces $X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}U_k + \mu_j$, así que $E\left[X_j\right] = \mu_j$ y

$Cov\left(X_j, X_k\right) = E\left[(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)\right] = E\left[(\sum_{r=1}^{n} a_{jr}U_r)(\sum_{s=1}^{n} a_{ks}U_s)\right]$

$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{jr}a_{ks}E\left[U_rU_s\right]) = \sum_{s=1}^{n} a_{js}a_{ks} = c_{jk}$

■

Obsérvese que una variable aleatoria gaussiana $X$ tiene la forma $X = aU + \mu$, donde $a, \mu \in \mathbb{R}$ y $U$ es una variable aleatoria con distribución normal estándar. Así que, o bien $X$ tiene distribución normal con parámetros $\mu$ y $a^2$, o bien $X$ es constante.

Recordemos que si $X$ es una variable aleatoria real, la función característica, $\Phi_X$, de $X$ está definida por:

$\Phi_X\left(t\right) = E\left[e^{itX}\right]$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

También, si $X$ es una variable aleatoria real, la función generadora de momentos, $M_X$, de $X$ está definida por:

$M_X\left(t\right) = E\left[e^{tX}\right]$

para todos aquellos números reales $t$ para los cuales $e^{tX}$ tenga esperanza finita.

Si $X$ tiene distribución normal estándar, entonces:

$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)}dx$

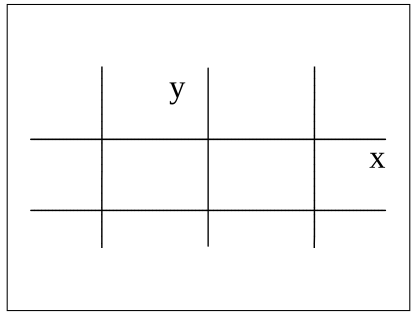
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx = e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = e^{\frac{1}{2}t^2}$

para cualquier número real $t$.

$\Phi_X\left(t\right) = E\left[e^{itX}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx$

$= e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx = e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{L} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$

donde $L : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la recta en el plano complejo definida por la función $x \to x - it$




Sea $\alpha$ un número real positivo arbitrario y consideremos el rectángulo $R_\alpha$ de vértices $A = -\alpha - it$, $B = \alpha - it$, $C = \alpha$ y $D = -\alpha$. Se tiene:

$\int_{R_\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$

Denotemos por $S_1$ al segmento $\overrightarrow{AB}$, por $S_2$ al segmento $\overrightarrow{BC}$, por $S_3$ al segmento $\overrightarrow{CD}$ y por $S_4$ al segmento $\overrightarrow{DA}$. Entonces:

$\int_L e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{S_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{R_\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \lim_{\alpha\to\infty} \int_{S_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \lim_{\alpha\to\infty} \int_{S_3} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \lim_{\alpha\to\infty} \int_{S_4} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

Por otra parte:

$\left| \int_{S_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = \left| \int_{\alpha - it}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = \left| \int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(\alpha + iu)^2} idu \right| = \left| \int_{-t}^{0} e^{-\frac{1}{2}(\alpha + iu)^2} du \right|$

$= e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \left| \int_{-t}^{0} e^{-i\alpha u} e^{\frac{1}{2}u^2} du \right| \leq e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \int_0^{|t|} \left| e^{-i\alpha u} \right| e^{\frac{1}{2}u^2} du = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \int_0^{|t|} e^{\frac{1}{2}u^2} du \leq e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sqrt{\pi}$

$\left| \int_{S_4} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = \left| \int_{-\alpha}^{-\alpha - it} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = \left| \int_0^{-t} e^{-\frac{1}{2}(-\alpha + iu)^2} idu \right| = \left| \int_0^{-t} e^{-\frac{1}{2}(-\alpha + iu)^2} du \right|$

$= e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \left| \int_0^{-t} e^{i\alpha u} e^{\frac{1}{2}u^2} du \right| \leq e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \int_0^{|t|} \left| e^{-i\alpha u} \right| e^{\frac{1}{2}u^2} du = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \int_0^{|t|} e^{\frac{1}{2}u^2} du \leq e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sqrt{\pi}$

Así que:

$\int_L e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0 - \lim_{\alpha\to\infty} \int_{S_3} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = - \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\alpha}^{-\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi}$

Por lo tanto:

$\Phi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

De manera más general si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio formado por variables aleatorias reales, se definen su función característica, $\Phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, y su función generadora de momentos, $M_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, respectivamente, de la siguiente manera:

$\Phi_X(v) = E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n} v_k X_k}\right]$

$M_X(v) = E\left[e^{\sum_{k=1}^{n} v_k X_k}\right]$

donde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

$M_X$ queda definida únicamente para aquellos vectores $v \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $E\left[e^{\sum_{k=1}^{n} v_k X_k}\right]$ tenga esperanza finita.

**Proposición 6.** *Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio gaussiano, sea $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ un vector aleatorio formado por variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ el vector de esperanzas de $X$, $C$ la matriz de covarianzas de $X$ y $A = (a_{jk})$ una matriz de $n \times n$ tales que $X = AU + \mu$. Entonces la función generadora de momentos de $X$, $M_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y la función característica de $X$, $\Phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, están dadas, respectivamente, por:*

$M_X(v) = e^{(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}(Cv)\cdot v\right\}$

$\Phi_X(v) = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Cv)\cdot v\right\}$

**Demostración**

$M_X(v) = E\left[e^{\sum_{j=1}^{n} v_j X_j}\right] = E\left[e^{\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n}\left(a_{jk}U_k + \mu_j\right)}\right]$

$= E\left[e^{\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}U_k\right) + \sum_{j=1}^{n} v_j\mu_j}\right] = e^{\sum_{j=1}^{n} v_j\mu_j} E\left[e\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}U_k\right)\right]$

$= e^{(v\cdot\mu)} E\left[e^{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}v_jU_k}\right] = e^{i(v\cdot\mu)} E\left[e^{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_jU_k}\right]$

$= e^{(v\cdot\mu)} \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_jU_k}\right] = e^{(v\cdot\mu)} \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_j\right)^2\right\}$

$= e^{(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_j\right)^2\right\}$

$= e^{(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}\left\|A^t v\right\|^2\right\} = e^{(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(A^t v\right)^t A^t v\right\}$

$= e^{(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}v^t A A^t v\right\} = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}v^t C v\right\}$

$= e^{(v\cdot\mu)} \exp\left\{\frac{1}{2}(Cv)\cdot v\right\}$

$\Phi_X(v) = E\left[e^{i\sum_{j=1}^{n} v_j X_j}\right] = E\left[e^{i\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n}\left(a_{jk}U_k + \mu_j\right)}\right]$

$= E\left[e^{i\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}U_k\right) + i\sum_{j=1}^{n} v_j\mu_j}\right] = e^{i\sum_{j=1}^{n} v_j\mu_j} E\left[e\left(i\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}U_k\right)\right]$

$= e^{i(v\cdot\mu)} E\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}v_jU_k}\right] = e^{i(v\cdot\mu)} E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_jU_k}\right]$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_j U_k}\right] = e^{i(v\cdot\mu)} \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_j\right)^2\right\}$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}v_j\right)^2\right\}$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\|A^t v\right\|^2\right\} = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(A^t v\right)^t A^t v\right\}$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^t A A^t v\right\} = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^t C v\right\}$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Cv)\cdot v\right\}$$

■

La función característica de una variable aleatoria o de un vector aleatorio determina su distribución. En particular, si $X$ y $Y$ son dos vectores aleatorios tales que $\Phi_X = \Phi_Y$, entonces $X$ y $Y$ tienen la misma distribución.

También se tiene el siguiente resultado (ver, por ejemplo, Chung, K. L., A course in probability theory, second edition, p. 187-188):

Las componentes de un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son independientes si y sólo si se cumple que:

$$\Phi_X(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \prod_{j=1}^{n} \Phi_{X_j}(v_j)$$

para cualquier vector $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Por otra parte, si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio, entonces, si $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son números naturales, se tiene:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial v_1^{k_1}\partial v_2^{k_2}\cdots\partial v_n^{k_n}}\Phi_X(v) = E\left[(iX_1)^{k_1}(iX_2)^{k_2}\cdots(iX_n)^{k_n} e^{i\sum_{k=1}^{n} v_k X_k}\right]$$

Por lo tanto:

$$E\left[(iX_1)^{k_1}(iX_2)^{k_2}\cdots(iX_n)^{k_n}\right] = \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial v_1^{k_1}\partial v_2^{k_2}\cdots\partial v_n^{k_n}}\Phi_X(0, 0, \ldots, 0)$$

**Lema 1.** *Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio cuya función característica está dada por:*

$$\Phi_X(v) = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^t C v\right\}$$

*donde $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ y $C = (c_{jk})$ es una matriz simétrica, entonces $\mu$ y $C$ son el vector de esperanzas de $X$ y la matriz de covarianzas de $X$, respectivamente.*

**Demostración**

$$\Phi_X(v) = e^{i\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}v_j v_k\right\}$$

Así que:

$\frac{\partial}{\partial v_r}\Phi_X(v) = e^{i\left(\sum_{j=1}^n v_j\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n c_{jk}v_jv_k\right\}\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n c_{rk}v_k + \sum_{j=1}^n c_{jr}v_j\right)\right]$

$+i\mu_r e^{i\left(\sum_{j=1}^n v_j\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n c_{jk}v_jv_k\right\}$

$= \Phi_X(v)\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n c_{rk}v_k + \sum_{j=1}^n c_{jr}v_j\right) + i\mu_r\right]$

$\frac{\partial^2}{\partial v_r^2}\Phi_X(v) = \Phi_X(v)\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n c_{rk}v_k + \sum_{j=1}^n c_{jr}v_j\right) + i\mu_r\right]^2 - \Phi_X(v)\, c_{rr}$

$\frac{\partial^2}{\partial v_r \partial v_s}\Phi_X(v)$

$= \Phi_X(v)\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n c_{sk}v_k + \sum_{j=1}^n c_{js}v_j\right) + i\mu_s\right]\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n c_{rk}v_k + \sum_{j=1}^n c_{jr}v_j\right) + i\mu_r\right]$

$-\Phi_X(v)\, c_{rs}$

En particular:

$\frac{\partial}{\partial v_r}\Phi_X(0,0,\ldots,0) = i\mu_r$

$\frac{\partial^2}{\partial v_r^2}\Phi_X(0,0,\ldots,0) = -\mu_r^2 - c_{rr}$

$\frac{\partial^2}{\partial v_r \partial v_s}\Phi_X(0,0,\ldots,0) = -\mu_s\mu_r - c_{rs}$

Así que,

$E[X_r] = -i\frac{\partial}{\partial v_r}\Phi_X(0,0,\ldots,0) = \mu_r$

$E[X_r^2] = -\frac{\partial^2}{\partial v_r^2}\Phi_X(0,0,\ldots,0) = \mu_r^2 + c_{rr}$

$E[X_rX_s] = -\frac{\partial^2}{\partial v_r \partial v_r}\Phi_X(0,0,\ldots,0) = \mu_s\mu_r + c_{rs}$

$Var(X_r) = E[X_r^2] - (E[X_r])^2 = c_{rr}$

$Cov(X_r, X_s) = E[X_rX_s] - E[X_r]E[X_s] = c_{rs}$

■

**Proposición 7.** *Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio gaussiano, entonces las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes si y sólo si su matriz de covarianzas es diagonal.*

**Demostración**

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes, la covarianza de cualquier par de ellas es cero, así que la matriz de covarianzas de $X$ es diagonal.

Supongamos ahora que la matriz de covarianzas $C = (c_{jk})$ de $X$ es diagonal, entonces, si $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ es el vector de esperanzas de $X$, para cualquier $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\Phi_X(v) = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Cv)\cdot v\right\} = e^{i\left(\sum_{j=1}^n v_j\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n c_{jj}v_j^2\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^n e^{iv_j\mu_j} e^{-\frac{1}{2}c_{jj}v_j^2} = \prod_{j=1}^n \Phi_{X_j}(v_j)$$

Así que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes.

■

**Proposición 8.** *Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

*i) $X$ es gaussiano.*

*ii) La función característica de $X$ está dada por:*

$$\Phi_X(v) = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Cv)\cdot v\right\}$$

*para cualquier $\nu \in \mathbb{R}^n$, donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $C$ es una matriz simétrica.*

*iii) Para cualquier vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aleatoria $Y = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j$ es gaussiana.*

**Demostración**

$i) \Rightarrow ii)$ se demostró arriba.

$ii) \Rightarrow iii)$

$$\Phi_Y(t) = E\left[e^{itY}\right] = E\left[e^{it\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j}\right] = E\left[e^{i\sum_{j=1}^n \lambda_j t X_j}\right] = \Phi_X(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_n t)$$

$$= e^{i\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j t\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n c_{jk}\lambda_j t\lambda_k t\right\}$$

$$= e^{it\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n c_{jk}\lambda_j\lambda_k\right\}$$

$$= e^{it\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\lambda^t C\lambda\right\}$$

Por el lema, $C$ es definida positiva.

Si $\lambda^t C\lambda > 0$, entonces $Y$ tiene distribución normal con esperanza $\sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j$ y varianza $\lambda^t C\lambda$. Así que $U = \frac{Y - \sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j}{\sqrt{\lambda^t C\lambda}}$ tiene distribución normal estándar y:

$$Y = \sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j + \sqrt{\lambda^t C\lambda}\,U$$

Así que Y es gaussiana.

Si $\lambda^t C\lambda = 0$, entonces $Y$ es una variable aleatoria constante e igual a $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j$. Así que $Y$ es gaussiana.

$iii) \Rightarrow i)$

Sean $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ el vector de esperanzas de $X$ y $V$ el subespacio vectorial de $L^2(\Omega, \Im, P)$ generado por $X_1 - \mu_1, X_2 - \mu_2, \dots, X_n - \mu_n$, el cual tiene dimensión menor o igual a $n$ y está formado por variables aleatorias gaussianas de esperanza cero. Sea $U_1, U_2, \dots, U_m$ una base ortonormal de $V$. Entonces las variables aleatorias $U_1, U_2, \dots, U_m$ tienen cada una distribución normal estándar y la covarianza entre cualquier par de ellas es cero.

Además, para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $U_k$ se puede expresar como combinación lineal de $X_1 - E[X_1], X_2 - E[X_2], \dots, X_n - E[X_n]$; es decir:

$U_k = \sum_{j=1}^{n} u_{kj} \left(X_j - \mu_j\right)$

donde cada término $u_{kj}$ es un número real.

Sea $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, entonces:

$\sum_{k=1}^{m} v_k U_k = \sum_{k=1}^{m} v_k \sum_{j=1}^{n} u_{kj} \left(X_j - \mu_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{kj} v_k \left(X_j - \mu_j\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} u_{kj} v_k\right) \left(X_j - \mu_j\right)$

Así que, como la variable aleatoria $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} u_{kj} v_k\right) \left(X_j - \mu_j\right)$ es gaussiana y su esperanza es cero, o bien $\sum_{k=1}^{m} v_k U_k$ es una variable aleatoria con distribución normal de esperanza 0 y varianza $E\left[\left(\sum_{k=1}^{m} v_k U_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{m} v_k^2$, o bien $\sum_{k=1}^{m} v_k U_k$ es constante e igual a 0. En cualquier caso se tiene:

$\Phi_U(v_1, v_2, \dots, v_m) = E\left[e^{i \sum_{k=1}^{m} v_k U_k}\right] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} v_k^2} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{2} v_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{U_k}(v_k)$

Así que las variables aleatorias $U_1, U_2, \dots, U_m$ son independientes.

Si $m < n$, consideremos $n - m$ variables aleatorias independientes, $U_{m+1}, \dots, U_n$, con distribución normal estándar e independientes de $U_1, U_2, \dots, U_m$.

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,la variable aleatoria $X_j - \mu_j$ se puede expresar como combinación lineal de $U_1, U_2, \dots, U_m$, así que también se puede expresar como combinación lineal de $U_1, U_2, \dots, U_n$. Podemos entonces definir una matriz $A$ de $n \times n$ tal que $X = \mu + AU$, donde $\mu$ es el vector de esperanzas de $X$. Por lo tanto, el vector aleatorio $X$ es gaussiano.

$\blacksquare$

## 3. Medidas gaussianas

Un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una función medible $X : (\Omega, \Im, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ definida por $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. La proyección de $P$ bajo $X$ es una medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, la cual denotaremos por $m_X$ y la llamaremos la distribución de $X$. Si $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$m_X(B) = P[X \in B]$

Si $X$ es gaussiano, diremos que su distribución, $m_X$, es una medida gaussiana.

Si $m$ es una medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, definimos su función característica $\Phi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$\Phi_m(v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(v \cdot x)} dm(x)$

para cualquier $\nu \in \mathbb{R}^n$.

Si $m_X$ es la distribución de un vector aleatorio $X$, se tiene $\Phi_{m_X} = \Phi_X$.

Por la proposición 8, una medida $\mu$, definida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, es gaussiana si y sólo si su función característica está dada por:

$\Phi_m(v) = e^{i(v \cdot \mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Cv) \cdot v\right\}$

para cualquier $\nu \in \mathbb{R}^n$, donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $C$ es una matriz simétrica definida positiva.

Sea $m$ una medida gaussiana sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ y $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, donde, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $X_j$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre la coordenada $j$. $X$ es entonces la función identidad de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y obviamente $X$ es un vector aleatorio. Si $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$m_X(B) = m[X \in B] = m(B)$

Por lo tanto, $X$ es un vector aleatorio gaussiano.

Así que se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 9.** *Sea $m$ una medida gaussiana sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, entonces el vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, definido sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), m)$, cuya $j$-ésima componente es la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre la coordenada $j$, es gaussiano y su distribución es $m$.*

## 4. Distribución normal multivariada

Una medida gaussiana sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ no es siempre absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si $Y$ es una variable aleatoria, definida sobre $(\Omega, \Im, P)$, con distribución normal estándar, el vector aleatorio $(Y, Y)$ es gaussiano y si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$, entonces:

$m_{(Y,Y)}(D) = P[(Y,Y) \in D] = 1$

Pero $D$ tiene medida de Lebesgue cero, así que $m_{(Y,Y)}$ no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

**Definición 8.** *Si la distribución $m_X$ de un vector aleatorio gaussiano $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ diremos que $X$ tiene distribución normal multivariada.*

**Proposición 10.** *La distribución $m_X$ de un vector aleatorio gaussiano $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si su matriz de covarianzas $C$ es definida estrictamente positiva. Si este es el caso, una función de densidad de $m_X$ con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ está dada por:*

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}C^{-1}(x-\mu)\cdot(x-\mu)\right\}$$

*donde $\mu$ es el vector de esperanzas de $X$.*

**Demostración**

Supongamos primero que la matriz de covarianzas $C$ es definida estrictamente positiva, entonces $C$ es invertible. Definamos entonces ma medida $m$ sobre $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera:

$$m(B) = \int_B \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}C^{-1}(x-\mu)\cdot(x-\mu)\right\} d\lambda_n(x)$$

donde $\mu$ es el vector de esperanzas de $X$ y $\lambda_n$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Se tiene entonces:

$$\Phi_m(v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(v\cdot x)} dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(v\cdot x)} \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}C^{-1}(x-\mu)\cdot(x-\mu)\right\} d\lambda_n(x)$$

para cualquier $\nu \in \mathbb{R}^n$.

Sea $B$ una matriz simétrica definida estrictamente positiva tal que $C = B^2$ y consideremos el cambio de variable $x = Bu + \mu$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(v\cdot x)} \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}C^{-1}(x-\mu)\cdot(x-\mu)\right\} d\lambda_n(x)$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} |B|\, e^{i(v\cdot Bu)} \frac{\left|B^{-1}\right|}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}C^{-1}Bu\cdot Bu\right\} d\lambda_n(u)$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(u^t B^t v\right)} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}u^t B^t B^{-1} B^{-1} B u\right\} d\lambda_n(u)$$

$$= e^{i(v\cdot\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(B^t v\cdot u\right)} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}u\cdot u\right\} d\lambda_n(u)$$

$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^t v\right)\cdot\left(B^t v\right)\right\}$

$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2} v^t B B^t v\right\} = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2} v^t C v\right\}$

$= e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Cv\right)\cdot v\right\}$

Así que $\Phi_m = \Phi_{m_X}$ y, por lo tanto, $m = m_X$.

Supongamos ahora que $C$ no es definida estrictamente positiva y sea $B$ una matriz simétrica y definida positiva tal que $C = B^2 = BB^t$.

Consideremos el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), m)$, donde $m$ es la distribución de un vector aleatorio cuyas componentes son variables aleatorias independientes, cada una de ellas con distribución normal estándar. Sea $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$, donde, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $U_j$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre la coordenada $j$. Las componentes de $U$ son entonces variables aleatorias independientes, definidas sobre $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), m)$, cada una de ellas con distribución normal estándar. Además $U(x) = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

Definamos $Y = BU + \mu$, entonces:

$\Phi_Y(v) = e^{i(v\cdot\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Cv\right)\cdot v\right\}$

para cualquier $\nu \in \mathbb{R}^n$, donde $C = BB^t$.

Por lo tanto, $X$ y $Y$ tienen la misma distribución, es decir $m_Y = m_X$.

Como $C$ no es definida estrictamente positiva, $B$ no es invertible, así que los vectores columna de $B$ generan un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión menor que $n$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene $Y(x) - \mu = BU(x) = Ax$; en particular, si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se tiene $Y(e_j) - \mu = Be_j$ para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto $Y(e_j) - \mu$ es el vector formado por la $j$-ésima columna de $B$, el cual denotaremos por $d_j$.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene entonces:

$Y(x) = \mu + \sum_{j=1}^{n} x_j d_j$

Así que la imagen de $\mathbb{R}^n$ bajo $Y - \mu$ está contenida en el subespacio $D$ de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores $d_1, d_2, \ldots, d_n$, cuya dimensión es menor que $n$.

Por lo tanto,

$m_Y(\mu + D) = 1$

Pero $\lambda_n(\mu + D) = 0$, así que $m_X = m_Y$ no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

■

**Corolario 6.** *Sea $X$ un vector aleatorio con función de densidad $f_X$ dada por:*

$f_X(x) = K \exp\left\{-\frac{1}{2}C^{-1}(x-\mu)\cdot(x-\mu)\right\}$

*donde $C$ es una matriz simétrica y definida estrictamente positiva y $K$ (real) y $\mu$ (vector) son constantes, entonces $X$ es gaussiano.*

Un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ formado por variables aleatorias con distribución normal, no necesariamente es gaussiano.

**Ejemplo 1.** *Sean $X$ y $Y$ dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & si\ x \geq 0, y < 0 \text{ ó } x < 0, y \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

*Se tiene:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy & si\ x < 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy & si\ x \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx & si\ y < 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx & si\ y \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

*Así que tanto $X$ como $Y$ tienen distribución normal estándar.*

*Además:*

$$Cov(X,Y) = E\left[XY\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0\int_0^\infty xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dydx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^0 xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dydx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -\frac{2}{\pi}$$

*Por lo tanto:*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{\pi^2-4} & 2\frac{\pi}{\pi^2-4} \\ 2\frac{\pi}{\pi^2-4} & \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\pi^2-4}\begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$|C^{-1}| = \frac{\pi^2}{\pi^2-4}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{\pi^2-4} & 2\frac{\pi}{\pi^2-4} \\ 2\frac{\pi}{\pi^2-4} & \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\pi^2-4}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\pi}{\pi^2-4}\left(\pi x^2 + 4xy + \pi y^2\right)$$

*Así que, si el vector aleatorio $(X,Y)$ fuera gaussiano, su función de densidad conjunta estaría dada por:*

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}C^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot(x,y)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2\sqrt{\pi^2-4}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{\pi^2-4}\left(\pi x^2+4xy+\pi y^2\right)\right\}$$

*Pero:*

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \textit{si } x\geq 0, y<0 \textit{ ó } x<0, y\geq 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

*Por lo tanto, el vector aleatorio $(X,Y)$ no es gaussiano.*

*De paso podemos ver que la suma $X+Y$ no tiene distribución normal, lo cual también sería una manera de mostrar que $(X,Y)$ no es gaussiano.*

$$f_{X+Y}(z)\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,z-x)dx=\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2)}dx & \textit{si } x\geq 0, z-x<0 \textit{ ó } x<0, z-x\geq 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2)}dx & \textit{si } x\geq 0, z-x<0 \textit{ ó } x<0, z-x\geq 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(2x^2-2xz+z^2)}dx & \textit{si } x\geq 0, x>z \textit{ ó } x<0, x\leq z \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2-xz)}dx & \textit{si } x\geq 0, x>z \textit{ ó } x<0, x\leq z \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2+\frac{1}{4}z^2}dx & \textit{si } x\geq 0, x>z \textit{ ó } x<0, x\leq z \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}e^{\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2}dx & \textit{si } x\geq 0, x>z \textit{ ó } x<0, x\leq z \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du & \textit{si } u+\frac{1}{2}z\geq 0, u+\frac{1}{2}z>z \textit{ ó } u+\frac{1}{2}z<0, u+\frac{1}{2}z\leq z \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du & \textit{si } u\geq -\frac{1}{2}z, u>\frac{1}{2}z \textit{ ó } u<-\frac{1}{2}z, u\leq \frac{1}{2}z \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\frac{1}{2}z}^{\infty}e^{-u^2}du+\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}z}e^{-u^2}du & \textit{si } z<0 \\ \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{\frac{1}{2}z}^{\infty}e^{-u^2}du+\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}z}e^{-u^2}du & \textit{si } z\geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du - \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{\frac{1}{2}z}^{-\frac{1}{2}z} e^{-u^2}du & si\ z < 0 \\ \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du - \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\frac{1}{2}z}^{\frac{1}{2}z} e^{-u^2}du & si\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}z^2} - \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\frac{1}{2}|z|}^{\frac{1}{2}|z|} e^{-u^2}du$$

*Por lo tanto, $X + Y$ no tiene distribución normal.*